UNIDAD IV: SERIES

4.1 Definición de sucesión

Una sucesión matemática es una función cuyo dominio es el conjunto de números naturales, por ejemplo:

En lugar de utilizar la típica notación de función f(n), una sucesión suele representarse como {}, en donde el entero n se conoce como índice de . Los diferentes términos de la sucesión se obtienen asignando a n los valores 1, 2, 3, 4, etc.

- Escribe los primeros 5 términos de las siguientes sucesiones:

a)

b)

c)

Se dice que una función es convergente si existe su límite cuando n tiende a infinito, en caso contrario se dice que es divergente.Determina si las siguientes funciones son convergentes o divergentes:

Por lo tanto, la sucesión es convergente

Por lo tanto, la sucesión es divergente

Por lo tanto, la sucesión es convergente

Por lo tanto, la sucesión es divergente

Por lo tanto, la sucesión es convergente

Por lo tanto, la sucesión es convergente

Por lo tanto, la sucesión es convergente

Una sucesión está definida recursivamente cuando un elemento está definido en términos del anterior. Por ejemplo:

Dado , obtén los primeros cuatro términos de la serie:

Si n=1, entonces:

Si n=2, entonces:

Si n=3, entonces:

Si n=4, entonces:

Sucesión=2, 10, 34, 106, 322

4.2 Definición de serie

Una serie matemática no es otra cosa que la suma de todos los elementos de una sucesión numérica, es finita si el número de elementos de la sucesión es finito y es infinita si el número de elementos de la sucesión es infinito.

-Determina las series matemáticas asociadas a las siguientes sucesiones

- Calcula la serie asociada a las siguientes sucesiones para los primeros cinco elementos

Si n=1

Si n=2

Si n=3

Si n=4

Si n=1

Si n=2

Si n=3

Si n=4

4.3 Serie numérica y convergencia

Una serie numérica puede ser separada en sumas parciales, ahora bien, la convergencia es un término que hace alusión a que el resultado de la serie tiende a un número real. Una serie converge al límite L solo si la sucesión de sumas parciales asociadas converge a L. Es decir:

4.4 Series de potencias

Una serie de la forma:

Recibe el nombre de serie de potencias centrada en el punto a. Como puede observarse para cada valor real, la serie es una serie numérica.

- Desarrolla los primeros 5 términos de la serie de potencias para a=0.

4.5 Radio de convergencia

Retomando la definición de series de potencias, es evidente que la función converge en x=a, pero no es claro si lo hace para otros valores de x. El matemático Abel estableció un teorema sobre la convergencia de las series de potencias, de modo que con relación a ellas se cumple una y sólo una de las afirmaciones siguientes:

a) La serie converge solo en x=a

b) Existe un número R>0 tal que la serie converge en

y no converge en

c) La serie converge para todo x real

Algo notable del teorema de Abel es que se deduce que la serie converge siempre en un intervalo de la forma (a-R,a+R), considerando que en el caso a) el valor de R es cero y en el caso c) R es infinito.

Al valor de R se le llama radio de convergencia y al intervalo (a-R,a+R) se le llama intervalo de convergencia.

- Encuentra una fórmula para calcular la suma:

Para que la serie converja es necesario que , en este caso:

- Calcula las siguientes sumas

- Una pelota de básquetbol se deja caer desde una altura de 100 m y cada vez que rebota su nueva altura máxima es 4/5 de la anterior. Calcula la distancia total que recorrerá la pelota

4.6 Serie de Taylor

Se trata de una aproximación de funciones mediante una serie de potencias que implica derivadas:

Cuando a=0 entonces la serie de Taylor se conoce como serie de Mc Laurin.

4.7 Representación de funciones mediante la serie de Taylor

Si hacemos a=0 para obtener la serie de Mc Laurin se tiene:

Otras series de Mc Laurin famosas son:

- Obtén la serie de McLaurin para las siguientes funciones:

4.8 Cálculo de integrales de funciones expresadas como serie de Taylor

- Aproxima las siguientes integrales con la serie de Taylor alrededor de a=0 (serie de Mc Laurin) tomando los primeros 7 términos de la serie

- Calcula las siguientes integrales utilizando la serie de Mc Laurin con los primeros 5 términos